جامعة الاخوة منتوري-قسنطينة- السنة الدراسية 2018 /2019

كلية العلوم والتكنولوجيا المدة : ساعة واحدة

السنة الثانية ST

امتحان قصير المدى في مقياس الرياضيات 3

التمرين الأول(6 نقاط)

أحسب تكامل **مضاعف واحد فقط** *من بين:*

Calculer seulement **une seule intégrale double** *parmi* :

$$I = \iint_D (x + e^{-y})\, dx\, dy \quad , \quad D = \{(x,y) \in IR^2 \;\; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

$$J = \iint_D x\, dx\, dy \;, D = \{(x,y) \in IR^2 \;, y \geq 0 \;; 1 \leq (x-1)^2 + y^2 \leq 4\}$$

التمرين الثاني(9 نقاط)

1- أدرس تقارب **3سلاسل العددية فقط** التالية :

1-Etudier la nature de **3 séries numériques seulement**

$1)\sum_{n\geq 0} \frac{(n+2)(n+1)}{(2n)!}$, $2)\sum_{n\geq 0} \frac{\sin n}{3^n}$, $3)\sum_{n\geq 0} \frac{ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2}$, $4)\sum_{n\geq 2} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2}$

2- عين ميدان متقارب للسلسلة الصحيحة التالية :

2-Donner le domaine de convergence de la série entière suivante

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

التمرين الثالث (5 نقاط)

حل المعادلة التفاضلية باستعمال السلاسل الصحيحة:

$$\begin{cases} xy'' + y' - y = 0 \\ y(0) = 1; \;\; y'(0) = 1 \end{cases}$$

Corrigé type interro 04 MATH 03
2018 - 2019

Exo 1

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ 0 \le x \le 1 ;\ 0 \le y \le 1-x\}$ (1)

$I = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x + e^{-y})\, dy \right) dx$ (1)

$I_1 = \int_0^{1-x} (x + e^{-y})\, dy$

$= xy - e^{-y} \Big]_0^{1-x}$ (1)

$= x - x^2 - e^{x-1} + 1$ (1)

$I = \frac{1}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} - e^{x-1} + x \Big]_0^1$ (1)

$I = e^{-1} + \frac{1}{6}$ (1)

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ y \ge 0 ;\ 1 \le (x-1)^2 + y^2 \le 4\}$ (1)

$\left.\begin{array}{l} x-1 \in \mathbb{R} \\ y > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \theta \in [0, \pi]$ (1) $\quad r \in [1,2]$ $\quad \left\{\begin{array}{l} x-1 = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right.$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ 0 < \theta \le \pi ;\ 1 \le r \le 2\}$

$f(x,y) = x = 1 + r\cos\theta$ (0,5)

$dx\,dy = r\,dr\,d\theta \quad r \neq 0$ (1)

$I = \int_1^2 \left(\int_0^{\pi} (1 + r\cos\theta)\, r\, d\theta \right) dr$ (1)

$I_1 = \int_0^{\pi} r + r^2\cos\theta\, d\theta = r\pi$ (1)

$I = \int_1^2 r\pi\, dr = \boxed{\frac{3\pi}{2} = I}$ (0,5)

Exo 2

(a) $\sum_{n \ge 0} \frac{(n+2)(n+1)}{(2n)!}$ (0,25)

D'Alembert موجبة سلسلة

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+3)}{(2n+2)(2n+1)(n+1)}$ (0,75)

$\lim_{n \to +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{4n^2} = 0 < 1$ (0,5) conv (0,25)

(b) $\sum_{n \ge 0} \frac{\sin n}{3^n}$ (0,25)

سلسلة تحقق شروط التقارب المطلق

$\sum \left| \frac{\sin n}{3^n} \right|$ (0,25)

سلسلة موجبة المقارنة

$\left| \frac{\sin n}{3^n} \right| \le \left(\frac{1}{3}\right)^n = V_n$ (0,25)

$\sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$ سلسلة هندسية متقاربة (0,5)

لأن $q = \frac{1}{3} \in]-1,+1[$.

$\sum_{n \ge 0} \left| \frac{\sin n}{3^n} \right|$ متقاربة (0,25) إذن

$\sum \frac{\sin n}{3^n}$ متقاربة (0,25) $\Leftarrow$

(c) $\sum_{n \ge 1} \frac{\ln(1 + 1/n)}{n^2}$ (0,25)

سلسلة موجبة

$V_n = \frac{1}{n^3}$ (0,75) المتتالية المرجعية

$\lim_{n \to +\infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \times \frac{n^2}{n^2} = 1$ (0,25)

$\alpha = 3 > 1$ R سلسلة معايير $\sum \frac{1}{n^3}$ متقاربة (0,25)

$\sum_{n \ge 1} \frac{\ln(1+1/n)}{n^2}$ متقاربة (0,25)

Math 3

(d) $\sum \left|\frac{n}{n-1}\right|^2$ (0,25)

Cauchy.

$(|u_n|)^{1/n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \frac{1}{(1-\frac{1}{n})^n}$ (1)

$\lim_{n\to+\infty} (|u_n|)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+\frac{(-1)}{n})^n} = \frac{1}{e^{-1}} = e$ (0,25)

$= e > 1 \Rightarrow$ div (0,25)

$\sum \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1$ (0,5) (0,5)

$x \in]-1,+1[\Rightarrow$ conv (0,5)

$x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\Rightarrow$ div (0,5)

$x = 1$: ($\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ div Riemann $\alpha = \frac{1}{2} < 1$) (0,5)

$x = -1$ $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ conv (Leibniz)

$\lim v_n = 0$ (0,25)

$v_n \downarrow$ (0,5)

$D = [-1,+1[$. (0,5)

$$\begin{cases} xy'' + y' - y = 0 \\ y(0) = 1 \ ; \ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$a_0 = y(0) = 1$

$a_1 = y'(0) = 1$ (0,5)

(a) $y = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

(b) $y' = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$

(c) $xy'' = \sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-1}$ (0,25)

(0,75)

توحيد الأس

$y = \sum_{n\geq 1} a_{n-1} x^{n-1}$ (0,5)

$y' = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$

$xy'' = \sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-1}$

توحيد الرتبة

$y = a_0 + \sum_{n\geq 2} a_{n-1} x^{n-1}$ (0,5)

$y' = a_1 + \sum_{n\geq 2} n a_n x^{n-1}$ (0,5)

$xy'' = \sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-1}$

$xy'' + y' - y = 0$ (0,5)

$\sum [n(n-1)a_n + n a_n - a_{n-1}] x^{n-1} + a_1 - a_0$

$\Rightarrow a_n (n^2 - n + n) - a_{n-1} = 0$

$a_n = \frac{a_{n-1}}{n^2}$ $n \geq 2$. (0,5)

$a_2 = \frac{a_1}{2^2} = \frac{1}{2^2}$.

$a_3 = \frac{1}{(3\times 2)^2} = \frac{1}{(3!)^2}$

$a_n = \frac{1}{(n!)^2}$. (0,5)

$$\boxed{y(x) = 1 + x + \sum_{n\geq 2} \frac{1}{(n!)^2} x^n}$$

(0,5)